Thermodynamique | Chapitre 3 | Correction TD (θ3)

Exercice n°1 • Détente de Joule-Gay-Lussac *cours*

On considère le système fermé {gaz + vide}. Au cours de la transformation, le système ne reçoit ni travail (parois rigides donc volume constant), ni chaleur (parois calorifugées). Le premier principe assure donc que $\Delta U_{syst} = 0$.
Par additivité de l'énergie interne, on a :

$$\Delta U_{syst} = \underbrace{\Delta U_{GP}}_{= C_V \Delta T} + \underbrace{\Delta U_{vide}}_{= 0} = 0$$

On en déduit : $\boxed{\Delta T = 0}$

Exercice n°2 • Échauffement par effet Joule *cours*

On applique le premier principe au liquide. L'enceinte est calorifugée donc il n'y a as d'échange de chaleur. La résistance fournie un travail électrique $W_{Joule} = RI^2 \Delta t$. Ainsi :

$$\Delta U = n\, C_{V,m} \Delta T = RI^2 \Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = \frac{n\, C_{V,m}}{RI^2}}$$

Exercice n°3 • Mélange de gaz parfaits *cours*

On considère le système fermé {GP1 + GP2}. Au cours de la transformation, le système ne reçoit ni travail (parois rigides donc volume constant), ni chaleur (parois calorifugées). Le premier principe assure donc que $\Delta U_{syst} = 0$.
Par additivité de l'énergie interne, on a :

$$\Delta U_{syst} = \Delta U_{GP1} + \Delta U_{GP2} = n_1\, C_{V,m}\, (T_f - T_1) + n_2\, C_{V,m}\, (T_f - T_2) = 0$$

On en déduit :

$$\boxed{T_f = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2}}$$

Exercice n°4 • Transformations infinitésimales *cours*

1) On prend la différentielle du log de l'équation d'état des gaz parfaits.

$$PV = nRT \quad \Rightarrow \quad \ln(P) + \ln(V) = \ln(n) + \ln(R) + \ln(T)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dn}{n} + \frac{dT}{T}}$$

2) Dans un petit compartiment et dans l'ensemble des compartiments de droite, on a :

$$P_2 dV = dn\, RT \quad \text{et} \quad P_2 V_2 = n_2 RT$$

On en déduit :

$$dV = \frac{V_2}{n_2}\, dn \quad \Rightarrow \quad \int_{V_1}^{V} dV = \frac{V_2}{n_2} \int_{n_1}^{n} dn \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = V_1 + \frac{V_2}{n_2}\,(n - n_1)}$$

<u>Remarque</u> : on a bien que $V = V_1$ lorsque $n = n_1$ et $V = V_1 + V_2$ lorsque $n = n_1 + n_2$.

3) On considère le système fermé {GP à gauche + GP du compartiment suivant}. Au cours de la transformation, le système ne reçoit ni travail (parois rigides donc volume constant), ni chaleur (parois calorifugées). Le premier principe assure donc que $dU_{syst} = 0$.
Par additivité de l'énergie interne, on a :

$$\begin{aligned} dU_{syst} &= dU_{gauche} + dU_{compartiment} \\ &= n\, C_{V,m} \left(\underbrace{T + dT}_{= T_f} - T \right) + dn\, C_{V,m} \left(\underbrace{T + dT}_{= T_f} - T_2 \right) = 0 \end{aligned}$$

On travaille au premier ordre :

$$n\, C_{V,m} dT + dn\, C_{V,m}\, (T - T_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dn}{n} = \frac{dT}{T_2 - T}$$

On intègre :

$$\int_{n_1}^{n} \frac{dn}{n} = \int_{T_1}^{T} \frac{dT}{T_2 - T} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{n}{n_1}\right) = \ln\left(\frac{T_2 - T}{T_2 - T_1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{n_1 T_1 + (n - n_1)\, T_2}{n}}$$

Remarque : on a bien que $T = T_1$ lorsque $n = n_1$ et $T = \dfrac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2}$ lorsque $n = n_1 + n_2$.

Exercice n°5 • Cycle de Lenoir *cours*

6) Transformation $0 \to 1$:

$$\Delta H_{01} = Q_{01} = \frac{5nR}{2}\,(T_1 - T_0) = \frac{5P_0V_0}{2} = 7,0 \text{ kJ}$$

Transformation $1 \to 2$:

$$\Delta U_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{12} = -W_{12} = -2P_0V_0 \ln(2) = -3,9 \text{ kJ}$$

Transformation $2 \to 0$:

$$W_{20} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{20} = \Delta U_{20} = -\frac{3P_0V_0}{2} = -4,2 \text{ kJ}$$

Exercice n°6 • Expériences de calorimétrie *cours*

Dans tout l'exercice, le système est {le calorimètre et tout ce qu'il contient}. On appliquera le premier principe version enthalpique car la transformation est monobare (en contact avec l'atmosphère). Le calorimètre étant parfait, $\Delta H_{syst} = W_u$

1) Le premier principe donne :

$$\begin{aligned}\Delta H_{syst} = 0 &= \Delta H_{calo} + \Delta H_{eau1} + \Delta H_{eau2} \\ &= \mu\, c_{eau}\,(T_f - T_1) + m_1\, c_{eau}\,(T_f - T_1) + m_2\, c_{eau}\,(T_f - T_2) \\ &\Rightarrow \boxed{\mu = -\frac{m_1\,(T_f - T_1) + m_2\,(T_f - T_2)}{T_f - T_1}}\end{aligned}$$

2) Le premier principe donne :

$$\begin{aligned}\Delta H_{syst} = RI^2\Delta t &= \Delta H_{calo} + \Delta H_{eau} \\ &= \mu\, c_{eau}\,(T_f - T_1) + m_1\, c_{eau}\,(T_f - T_1) \\ &\Rightarrow \boxed{c_{eau} = \frac{RI^2\Delta t}{(\mu + m_1)\,(T_f - T_1)}}\end{aligned}$$

3) Le premier principe donne :

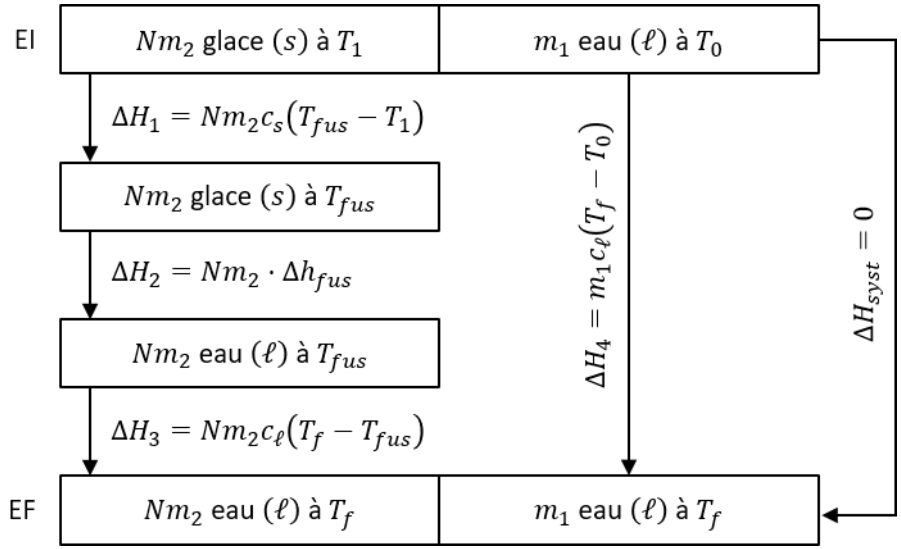
$$\begin{aligned}\Delta H_{syst} = 0 &= \Delta H_{calo} + \Delta H_{eau} + \Delta H_{solide} \\ &= \mu\, c_{eau}\,(T_f - T_1) + m_1\, c_{eau}\,(T_f - T_1) + m_2\, c\,(T_f - T_2) \\ &\Rightarrow \boxed{c = -\frac{(\mu + m_1)\; c_{eau}\,(T_f - T_1)}{m_2\,(T_f - T_2)}}\end{aligned}$$

Exercice n°7 • Préparation d'un thé glacé *cours*

1) Dans l'état final, le système peut être :

- entièrement liquide si « peu » de glaçons ont été ajoutés, dans ce cas $T_f > 0$ est à déterminer ;
- entièrement solide si « beaucoup » de glaçons ont été ajoutés, dans ce cas $T_f < 0$ est à déterminer ;
- un mélange solide / liquide à la température $T_{fus} = 0$ °C, dans ce cas la fraction massique du système dans la phase liquide $x_\ell \in [0, 1]$ est à déterminer.

2) On suppose que le système est entièrement liquide dans l'état final. On imagine une série de transformation (fictive) qui transforme le système de l'état initial dans l'état final.



Le système est macroscopiquement au repos, les parois du thermos sont calorifugées et la transformation est monobare. Le premier principe de la thermodynamique donne donc :

$$\Delta H_{syst} = 0$$

Par additivité de l'enthalpie :

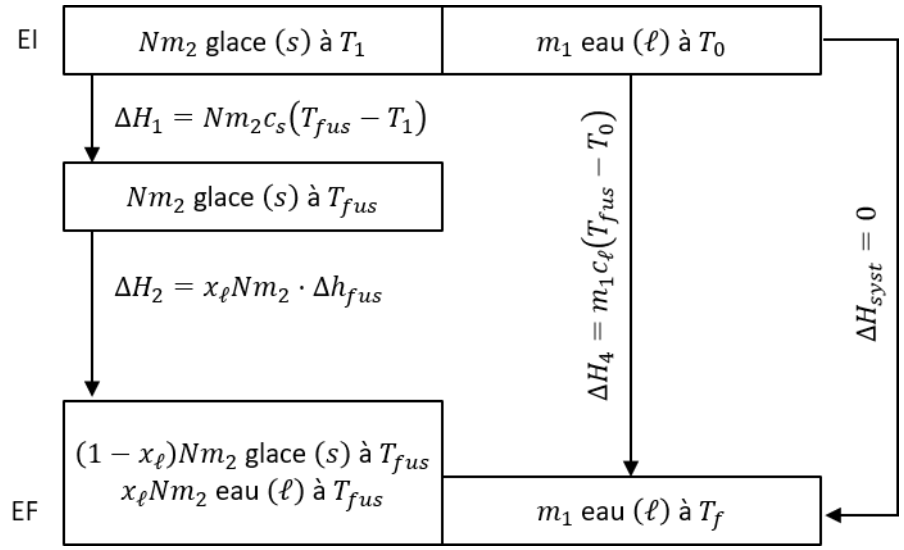
$$\Delta H_{syst} = 0 = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4$$

On peu isoler T_f et l'application numérique donne :

$$\boxed{T_f = \frac{-Nm_2c_s\left(T_{fus} - T_1\right) - Nm_2\Delta h_{fus} + Nm_2c_\ell T_{fus} + m_1c_\ell T_0}{Nm_2c_\ell + m_1c_\ell} = 13,4\ °\text{C}}$$

On trouve $T_f > 0$ donc l'hypothèse est vérifiée.

3) On peut déjà reprendre la formule précédente et on trouve $T_f = -1,1$ °C < 0. L'hypothèse est donc fausse. Étant que la température obtenue est proche de $T_{fus} = 0$ °C, on fait à présent l'hypothèse que l'état final est un mélange solide / liquide à T_{fus}.



On fait de même :

$$\boxed{x_\ell = \frac{-Nm_2c_s\left(T_{fus} - T_1\right) - m_1c_\ell\left(T_{fus} - T_0\right)}{Nm_2\Delta h_{fus}} = 92,8\ \%}$$

Cohérent avec l'hypothèse. 93 % de la masse des glaçons est passer sous forme liquide.

Exercice n°8 • Échauffement d'un gaz parfait ★☆☆

1) On applique le PFD sur le piston dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On se place à l'équilibre et on néglige le poids du piston :

$$0 = -P_0S + PS \quad \Rightarrow \quad P = P_0 = \frac{nRT_0}{Sh} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{nRT_0}{P_0S} = 25\ \text{cm}}$$

2) C'est une transformation isochore et monotherme.

Travail : $\boxed{W = 0}$ (car isochore).

Énergie interne (GP diatomique) : $\boxed{\Delta U = \frac{5}{2}nR\left(T_1 - T_0\right)}$.

D'après le premier principe sur le gaz : $\boxed{Q = \frac{5}{2}nR\left(T_1 - T_0\right)}$.

3) C'est une transformation isobare.

État final : T_1, $P_1 = P_0$ et donc : $V_1 = \frac{nRT_1}{P_0}$

Travail :

$$\boxed{W' = -\int_{V_0}^{V_1} P_0\,dV = -nR\left(T_1 - T_0\right)}$$

D'après le premier principe (version enthalpique) : $\boxed{\Delta H' = Q' = \frac{7}{2}nR\left(T_1 - T_0\right)}$

Exercice n°9 • Évolution irréversible ★⯪☆

1) Équilibre mécanique (PFD) :

$$0 = P_2S - P_1S - mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_2 = P_1 + \frac{mg}{S} = 1,062\ \text{bar}}$$

La transformation est supposée adiabatique : $\boxed{Q_{12} = 0}$

Remarque : Attention dans cette question, bien que l'on ait une transformation monobare à P_2, il n'est pas possible d'utiliser la version enthalpique du premier principe car l'état initial ($t = 0^+$) n'est pas un état équilibre mécanique.

Travail :

$$W_{12} = -P_2\left(V_2 - V_1\right) = -nR\left(T_2 - \frac{P_2}{P_1}T_1\right)$$

Énergie interne :

$$\Delta U_{12} = \frac{5}{2} nR\left(T_2 - T_1\right)$$

Le premier principe donne :

$$\begin{aligned}
\Delta U_{12} = W_{12} \quad &\Rightarrow \quad \frac{5}{2}\left(T_2 - T_1\right) = -\left(T_2 - \frac{P_2}{P_1} T_1\right) \\
&\Rightarrow \quad \frac{7}{2} T_2 = \left(\frac{5}{2} + \frac{P_2}{P_1}\right) T_1 \\
&\Rightarrow \quad \boxed{T_2 = \left(\frac{5}{7} + \frac{2P_2}{7P_1}\right) T_1 = 302 \text{ K}}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} = 1,93 \text{ L}} \quad \text{et} \quad \boxed{W_{12} = 7,00 \text{ J}}$$

2) On a équilibre mécanique et thermique :

$$\boxed{P_3 = P_2 = 1,062 \text{ bar}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_3 = T_1 = 298 \text{ K}}$$

On en déduit : $\boxed{V_3 = \frac{nRT_3}{P_3} = 1,91 \text{ L}}$.

La transformation est isobare à P_2 et monotherme à T_1.

Travail :

$$\boxed{W_{23} = -P_3\left(V_3 - V_2\right) = 2,80 \text{ J}}$$

Premier principe version enthalpique :

$$\boxed{Q_{23} = \Delta H_{23} = \frac{7}{2} nR\left(T_3 - T_2\right) = -9,81 \text{ J}}$$

Exercice n°10 • Marteau-pilon ★⯪☆

On applique le premier principe au système marteau pilon (P) et l'objet (A) en tenant compte de l'énergie potentielle de pesanteur du marteau pilon, immobile au départ.

$$\underbrace{\Delta \mathcal{E}_{p,P}}_{=0-m_P g h} + \underbrace{\Delta U_P}_{=0} + \underbrace{\Delta U_A}_{=\frac{3Rm_A}{M_{\text{Al}}}\Delta T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta T = \frac{m_P g h M_{\text{Al}}}{3Rm_A} = 64 \text{ K}}$$

Exercice n°11 • Bilans énergétiques ★★☆

1) Soit le système {GP n°1 + GP n°2 + résistor}. Le système ce reçoit ni travail ni chaleur au cours de la transformation. Donc $W_{fp,syst} = 0$ et $Q_{syst} = 0$. Le premier principe + l'additivité de l'énergie interne donnent :

$$\begin{aligned}
\Delta U_{syst} &= RI_0^2 \Delta t \\
&= \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_{syst} \\
&= \frac{3}{2} nR\Delta T_1 + \frac{3}{2} nR\Delta T_2 + C\Delta T_1
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{RI_0^2 \Delta t = \left(\frac{3P_0V_0}{2T_0} + C\right)\Delta T_1 + \frac{3P_0V_0}{2T_0}\Delta T_2}$$

2) On a donc $\Delta T_2 = 60$ K. On en déduit :

$$\Delta T_1 = \frac{RI_0^2 \Delta t - \frac{3P_0V_0}{2T_0}\Delta T_2}{\frac{3P_0V_0}{2T_0} + C} = 82 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_1 = 382 \text{ K}}$$

3) À l'équilibre mécanique, les pressions P_1 et P_2 sont égales et on a donc :

$$\frac{P}{nR} = cte = \frac{T}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_2}{V_2} = \frac{T_1}{V_1}$$

De plus, $V_1 + V_2 = 2V_0$. Ainsi,

$$\boxed{V_1 = \frac{2V_0T_1}{T_2 + T_1} = 1,03 \text{ L}} \quad \text{et} \quad \boxed{V_2 = \frac{2V_0T_2}{T_2 + T_1} = 0,97 \text{ L}}$$

On obtient pour les pressions :

$$\boxed{P_1 = P_2 = \frac{nRT_1}{V_1} = 1,24 \text{ bar}}$$

4) La capacité thermique du gaz est :

$$C_V = \frac{3}{2} nR = 0,5 \text{ J·K}^{-1}$$

largement inférieure à celle du résistor. Négliger la capacité thermique du résistor aurait donc conduit à des résultats numériquement très différents.

Exercice n°12 • Bouteille thermos ★★☆

1) Le premier principe (version enthalpique) sur le système {calorimètre + tout ce qu'il contient} donne (en négligeant la capacité thermique du calorimètre) :

$$\Delta H_{syst} = 0 = mc_{eau}\left(T_{eq,0} - T_1\right) + mc_{eau}\left(T_{eq,0} - T_2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{eq,0} = \frac{T_1 + T_2}{2} = 50\ \text{°C}}$$

Puisque $T_{eq,0} \neq 49$ °C, la capacité thermique du calorimètre n'est pas négligeable.

2) On reprend le premier principe en ajoutant la capacité thermique du calorimètre.

$$\Delta H_{syst} = 0 = mc_{eau}\left(T_{eq} - T_1\right) + mc_{eau}\left(T_{eq} - T_2\right) + C_t\left(T_{eq} - T_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_t = -\frac{mc_{eau}\left(2T_{eq} - T_1 - T_2\right)}{T_{eq} - T_1} = 167\ \text{J·K}^{-1}}$$

3) On rappelle que $c_{eau} = 4,18$ kJ·kg^{-1}·K^{-1}. Calculons la valeur en eau du calorimètre.

$$\boxed{m_c = \frac{C_t}{c_{eau}} = 40\ \text{g}}$$

On trouve bien la valeur indiquée.

4) Lorsque $T(t) > T_{ext}$, on a $\mathcal{P}_{th} > 0$. Donc la puissance thermique perdue par la bouteille est positive, ce qui est cohérent car la bouteille va perdre de la chaleur.

5) Appliquons le premier principe (version infinitésimale). On rappelle que les travaux/puissances sont ceux algébriquement reçus par le système. Or, ici on donne une puissance perdue, il s'agit donc de l'opposé d'une puissance reçue.

$$dH_{syst} = -\mathcal{P}_{th}dt = CdT \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{kS}{C}T = \frac{kS}{C}T_{ext}}$$

On note $\tau = \dfrac{C}{kS}$ le temps caractéristique de variation de la température.

6) Solution :

$$T(t) = \left(T_0 - T_{ext}\right)e^{-t/\tau} + T_{ext}$$

Graphe : exponentielle décroissante allant de T_0 à T_{ext}.

7) On a :

$$\Delta T = T(t = \Delta t) - T(t = 0) = \left(T_0 - T_{ext}\right)\left(e^{-\Delta t/\tau} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\Delta t/\tau} = 1 + \frac{\Delta T}{T_0 - T_{ext}}$$

$$\Rightarrow \quad \tau = -\frac{\Delta t}{\ln\left(1 + \dfrac{\Delta T}{T_0 - T_{ext}}\right)} = 395\ \text{min}$$

C'est un bon thermos !

Exercice n°13 • Plaque à induction ★★☆

Système : {casserole + eau}. On suppose que le système est fermé et que le temps de chauffe est suffisamment court pour que l'on puisse négliger les échanges thermiques avec l'air. On suppose que la température initiale de l'eau est de $T_0 = 20$ °C. On souhaite l'emmener à $T_{eb} = 100$ °C. Enfin, on néglige la capacité thermique de la casserole.

Le premier principe (version enthalpique) donne :

$$\Delta H_{syst} = mc_{eau}\left(T_{eb} - T_0\right) = \mathcal{P}\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = mc_{eau}\frac{T_{eb} - T_0}{\mathcal{P}} = 146\ \text{s}$$

L'ordre de grandeur est le bon : environ 2 min 30 s.

Exercice n°14 • Transpiration ★★☆

On applique le premier principe à la peau du corps humain (capacité C_{peau}). On suppose qu'il s'agit d'un système fermé. La peau :

- reçoit de la chaleur ($Q_{peau} = \mathcal{P}_{meta}\Delta t$) venant du métabolisme humain ;
- fournie de la chaleur ($Q_{transpi.} = -m_{eau}\Delta h_{vap}$ la chaleur reçue) pour faire évaporer de l'eau ;
- et peut échanger de la chaleur avec l'atmosphère (on note Q_{atm} la chaleur reçue).

Ainsi,

$$\Delta H = C_{peau}\Delta T = \mathcal{P}_{meta}\Delta t - m_{eau}\Delta h_{vap} + Q_{atm}$$

L'énoncé nous demande m_{eau} sur une journée de sorte que :

$$0 = \mathcal{P}_{meta}\Delta t - m_{eau}\Delta h_{vap} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_{eau} = \frac{\mathcal{P}_{meta}\Delta t}{\Delta h_{vap}} = 2,7\ \text{kg}}$$

Grâce au métabolisme, le corps peut donc évaporer $\boxed{2,7\text{ L}}$ d'eau.

Le corps humain se maintient à température constante ($\Delta T = 0$). L'eau réellement évaporée vaut :

$$m_{eau} = \frac{\mathcal{P}_{meta}\Delta t + Q_{atm}}{\Delta h_{vap}}$$

Puisque $Q_{atm} < 0$ (le corps humain est en général plus chaud que l'atmosphère, il perd donc de la chaleur), on a bien $\boxed{m_{eau} < 2,7\text{ kg}}$.

Impossible d'être plus précis sans plus d'indication. La valeur de $0,5$ L d'eau par jour annoncé est parfaitement cohérent avec le raisonnement.

Essuyer l'eau avec une serviette peut avoir deux effets :

- cela enlève une partie de l'eau présente sur la peau, cette eau ne participe donc plus au refroidissement de la peau par transpiration ;
- mais la serviette contribue également à étaler l'eau sur une plus grande surface de peau (l'eau n'est plus localisée au niveau des pores), ce qui augmente la rapidité des échanges thermiques.

Exercice n°15 • Eau glacée ★★⯪

1) Les transformations sont adiabatiques et monobares. On a donc : $\Delta H_{syst} = 0$ où le système est composé de l'enceinte (capacité nulle) de l'eau et des glaçons.

<u>Premier cas</u> : le système à l'équilibre est constitué de glace à 0 °C

Dans ce cas, il faut :

- chauffer les glaçons jusqu'à T_0 : $\Delta H = m_2 c_2 (T_0 - T_2)$
- refroidir l'eau jusqu'à T_0 : $\Delta H = m_1 c_1 (T_0 - T_1)$
- solidifier entièrement l'eau : $\Delta H = -m_1 \ell_{fus}$

Ainsi, le premier principe donne :

$$0 = m_2 c_2 (T_0 - T_2) + m_1 c_1 (T_0 - T_1) - m_1 \ell_{fus}$$

Donc :

$$\boxed{x_s = \frac{c_1 (T_1 - T_0) + \ell_{fus}}{c_2 (T_0 - T_2)} = 14,9}$$

<u>Deuxième cas</u> : le système à l'équilibre est constitué d'eau à 0 °C

Dans ce cas, il faut :

- refroidir l'eau jusqu'à T_0 : $\Delta H = m_1 c_1 (T_0 - T_1)$
- chauffer les glaçons jusqu'à T_0 : $\Delta H = m_2 c_2 (T_0 - T_2)$
- faire fondre entièrement les glaçons : $\Delta H = m_2 \ell_{fus}$

Ainsi, le premier principe donne :

$$0 = m_1 c_1 (T_0 - T_1) + m_2 c_2 (T_0 - T_2) + m_2 \ell_{fus}$$

Donc :

$$\boxed{x_\ell = \frac{c_1 (T_1 - T_0)}{c_2 (T_0 - T_2) + \ell_{fus}} = 0,197}$$

2) Pour $x \leq x_\ell$ on n'a que de l'eau liquide à $T > T_0$, pour $x \geq x_s$, que de la glace à $T < T_0$ et pour $x \in [x_\ell; x_s]$ on a un mélange eau liquide/glace à T_0 dont la composition est variable.

3) Prenons un glaçon de masse 10 g, on obtient :

$$\begin{aligned} m_{2,\ell} &= x_\ell \cdot m_1 = 19,7\text{ g} &\Rightarrow\quad N_\ell &= 2\text{ glaçons} \\ m_{2,s} &= x_s \cdot m_1 = 1,49\text{ kg} &\Rightarrow\quad N_s &= 150\text{ glaçons} \end{aligned}$$

4) Avec $m_2 = 30$ g (ie. $x = 0,3$), on se trouve dans le domaine où une partie de la glace a fondu. La température d'équilibre est alors T_0. Notons α la fraction de la glace qui a fondu. Les variations d'enthalpie sont donc descriptibles comme :

- refroidir l'eau jusqu'à T_0 : $\Delta H = m_1 c_1 (T_0 - T_1)$
- chauffer les glaçons jusqu'à T_0 : $\Delta H = m_2 c_2 (T_0 - T_2)$
- faire fondre une fraction α des glaçons : $\Delta H = \alpha m_2 \ell_{fus}$

Ainsi, le premier principe donne :

$$0 = m_1 c_1 (T_0 - T_1) + m_2 c_2 (T_0 - T_2) + \alpha m_2 \ell_{fus}$$

Donc :

$$\boxed{\alpha = \frac{m_1 c_1 (T_1 - T_0)}{m_2 c_2 (T_0 - T_2) + m_2 \ell_{fus}} = 0,63}$$

On en déduit que 63 % de la masse des glaçons a fondu. Il reste donc environ $11,1$ g de glace.

Exercice n°16 • Détente d'un gaz sous l'action d'un ressort ★★★

Équations d'état des gaz parfait :

$$\boxed{P_0 V_0 = nRT_0} \quad \text{et} \quad \boxed{P_f V_f = nRT_f}$$

Équilibre mécanique du piston à l'état final :

$$0 = P_f S + k\left(\ell_f - \ell_0\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_f = \frac{k}{S}\left(\ell_0 - \ell_f\right)}$$

On applique e premier principe au système {gaz parfait + piston + vide}. Il y a ni travail, ni chaleur échangée. Il faut prendre en compte la variation d'énergie potentielle élastique.

$$\Delta U + \Delta \mathcal{E}_p = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{nR}{\gamma - 1}\left(T_f - T_0\right) + \frac{1}{2}k\left(\ell_f - \ell_0\right)^2 = 0}$$

Relation volume / longueur du ressort :

$$\boxed{V_f = V_0 + S\left(\ell_0 - \ell_f\right)}$$

On a autant d'équations que d'inconnues, on peut se lancer dans l'établissement de l'équation.

$$\begin{aligned}
& \frac{nR}{\gamma - 1}\left(T_f - T_0\right) + \frac{1}{2}k\left(\ell_f - \ell_0\right)^2 = 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{nR}{\gamma - 1}\left(\frac{P_f}{nR}V_f - T_0\right) + \frac{1}{2}k\left(\ell_f - \ell_0\right)^2 = 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{nR}{\gamma - 1}\left(\frac{P_f}{nR}V_0 + \frac{P_f}{nR}S\left(\ell_0 - \ell_f\right) - T_0\right) + \frac{1}{2}k\left(\ell_f - \ell_0\right)^2 = 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{nR}{\gamma - 1}\left(\frac{P_f}{nR}V_0 + \frac{S^2 P_f^2}{knR} - T_0\right) + \frac{S^2 P_f^2}{2k} = 0 \\
\Rightarrow \quad & \boxed{\frac{\left(\gamma + 1\right) S^2}{2k} P_f^2 + V_0\, P_f - nRT_0 = 0}
\end{aligned}$$

On peut alors en déduire que :

$$P_f = \frac{k}{\left(\gamma + 1\right) S^2}\left(-V_0 + \sqrt{V_0^2 + \frac{2\left(\gamma + 1\right) nRT_0 S^2}{k}}\right)$$

Tous les autres paramètres peuvent alors se déduire des relations précédentes.